

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. NARDINI

ESISTENZA DI POLI DI RISONANZE PER ALCUNI OPERATORI AUTOAGGIUNTI

24 GIUGNO - 1 LUGLIO 1982

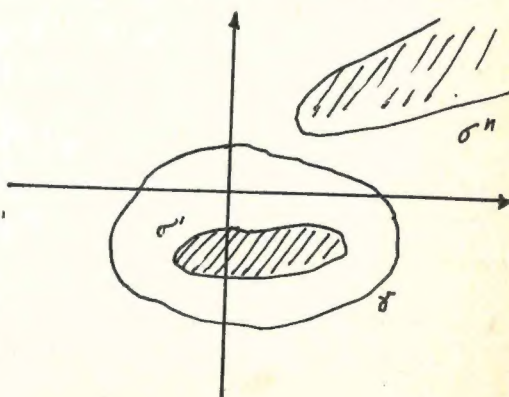
INTRODUZIONE

In questo seminario affronteremo il problema dell'esistenza di poli di risonanza per alcuni operatori autoaggiunti in $L^2(\mathbb{R}^3)$ che sono operatori di Hamilton di altrettanti sistemi meccanici quantistici.

Per introdurre il concetto di polo di risonanza richiamiamo brevemente alcuni noti fatti di analisi spettrale. Sia H uno spazio di Hilbert e $D \subseteq \mathbb{C}$; sia $H(\beta)$ una funzione definita in D e a valori operatori chiusi in H . $H(\beta)$ si dice *famiglia (di operatori) continua in senso generalizzato* (o *del gap*) se sono soddisfatte le due seguenti condizioni [13: ch IV § 2.6.]

- I) $\rho(H(\beta_0)) \neq \emptyset, \quad \forall \beta_0 \in D$
- II) $\forall \beta_0 \in D \quad \forall \lambda_0 \in \rho(H(\beta_0)) \quad \exists V$ intorno di β_0 in D
 tale che $\lambda_0 \in \rho(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V$ e la funzione
 $\beta \rightarrow (H(\beta) - \lambda_0)^{-1}$ è continua (in $L(H)$).

In tal caso se γ è una curva continua semplice e chiusa che separa lo spettro di $H(\beta_0)$ (cioè $\sigma(H(\beta_0)) = \sigma'(H(\beta_0)) \cup \sigma''(H(\beta_0))$ e $\sigma'(H(\beta_0))$ è contenuto nella componente connessa limitata di $\mathbb{C} - \gamma$ mentre $\sigma''(H(\beta_0))$ è contenuto nella componente connessa non limitata di $\mathbb{C} - \gamma$), allora esiste un intorno V' di β_0 in D tale che γ separa $\sigma(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V'$ [13: ch IV th. 3.16]; in particolare se $\sigma'(H(\beta_0)) = \{\lambda_0\}$ e λ_0 è un autovalore isolato di molteplicità



finita m di $H(\beta_0)$, allora $H(\beta)$ ha esattamente m autovalori (contando la molteplicità) nella componente connessa limitata di $C-\gamma$ $\forall \beta \in V'$, inoltre tali autovalori tendono a λ_0 per $\beta \rightarrow \beta_0$ [13: ch IV § 3.5]. Questo risultato garantisce fra l'altro che $\sigma(H(\beta))$ non può espandersi improvvisamente al variare di β .

La famiglia $H(\beta)$ si dice *olomorfa nel senso di Kato* se soddisfa alla I) ed alla

- II)' $\forall \beta_0 \in D \quad \forall \lambda_0 \in \rho(H(\beta_0)) \quad \exists V$ intorno di β_0 in D tale che $\lambda_0 \in \rho(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V$ e la funzione $\beta \rightarrow (H(\beta) - \lambda_0)^{-1}$ è una funzione olomorfa in V a valori nello spazio di Banach $L(H)$ [13: ch VII § 1.1, 1.2].

In questa ipotesi continuano a valere tutti i risultati precedenti e inoltre se $\sigma'(H(\beta_0))$ è un sistema finito di autovalori (cioè $\sigma'(H(\beta_0))$ è costituito solamente da un numero finito di autovalori isolati e di molteplicità finita [13: ch III § 6.5]), allora l'intorno V' può essere scelto in modo tale che $\sigma'(H(\beta))$ sia costituito dai valori che assumono in β le determinazioni di una o più funzioni analitiche in V' con al più ivi punti di diramazione algebrici [13: ch VII th. 1.8].

Esaminiamo ora brevemente un tipo di regolarità più debole.

Sia $H(\beta)$ una funzione definita nel dominio D e a valori operatori chiusi in H e sia $\beta_0 \in D$ un punto di accumulazione di D ; si dice che $H(\beta)$ *converge ad $H(\beta_0)$* (oppure è *continua in β_0*) in senso forte generalizzato se sono soddisfatte le seguenti condizioni [13: ch VIII § 1.1]:

- I) $\rho(H(\beta_0)) \neq \emptyset$
 II) $\exists \lambda_0 \in \rho(H(\beta_0))$ ed un intorno V di β_0 in D tale che $\lambda_0 \in \rho(H(\beta)) \quad \forall \beta \in V$ e $(\lambda_0 - H(\beta))^{-1} \xrightarrow[\beta \rightarrow \beta_0]{s.} (\lambda_0 - H(\beta_0))^{-1}$

Si dice *regione di limitatezza*, e si indica con Δ_p , l'insieme dei punti $\lambda_0 \in C$ tali che esiste un intorno V di β_0 in D ed una costante $M > 0$ ta-

li che $\|(\lambda_0 - H(\beta))^{-1}\| < M \quad \forall \beta \in V$; si dice *regione di convergenza forte*, e si indica con Δ_S , l'insieme dei punti $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ che soddisfano II); si può provare che [13: ch VIII, th 1.3] $\Delta_S = \Delta_D \cap \rho(H(\beta_0))$. In queste ipotesi il teorema di stabilità della separazione dello spettro non vale più; lo spettro può espandersi improvvisamente ed in particolare un autovalore isolato di molteplicità finita di $H(\beta_0)$ può "essere assorbito" dallo spettro essenziale di $H(\beta)$ non appena $\beta \neq \beta_0$ [13: ch VIII § 1.3]. Se ciò non avviene si può dare la seguente *definizione di autovalore stabile*. Un autovalore isolato di molteplicità finita λ_0 di $H(\beta_0)$ si dice stabile per la famiglia $H(\beta)$ $\beta \in D$ se sono soddisfatte le due seguenti condizioni [13: ch VIII § 1.4]

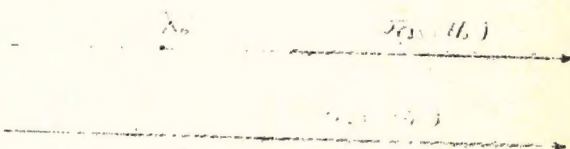
- I) $\exists \delta > 0$ tale che $\{\zeta \in \mathbb{C}; 0 < |\zeta - \lambda_0| < \delta\} \subseteq \Delta_S$
 II) se $P(\beta) = + (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda_0|=r} (z - H(\beta))^{-1} dz \quad (r < \delta)$
 allora $P(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow \beta_0]{\|\cdot\|} P(\beta_0)$.

Per illustrare il caso in cui l'autovalore non è stabile, supponiamo che H_0 sia un operatore autoaggiunto in H e W un operatore simmetrico in H tale che $H_F = H_0 + FW$ sia autoaggiunto $\forall F > 0$; sotto ipotesi molto generali su W [13: ch VII th 1.5] si ha che H_F tende ad H_0 in senso forte generalizzato per $F \rightarrow 0$. Supponiamo che λ_0 sia un autovalore isolato di molteplicità finita

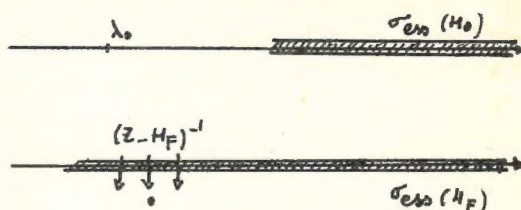
di H_0 ed un punto dello spettro essenziale di H_F $\forall F > 0$. In tali ipotesi

si può provare che

[16: th. VII.23] la misura spettrale di H_F si concentra in λ_0 quando $F \rightarrow 0$. Tuttavia la concentrazione della misura spet-



trale non è l'unico "ricordo" che H_F conserva dell'autovalore di H_0 , ma il risolvante di H_F presenta una "singolarità vicino a λ_0 " se viene opportunamente prolungato dal semipiano $\text{Im } z > 0$ attraverso l'asse reale. Precisiamo quest'ultima affermazione dando la [16: ch XII § 6].



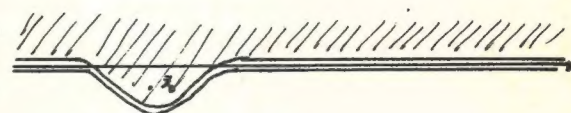
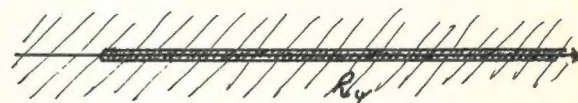
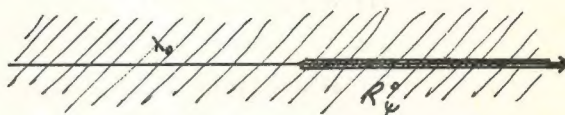
Definizione di polo di risonanza

Usiamo le notazioni ora introdotte e supponiamo che esista un insieme \mathcal{D} denso in H tale che per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ le due funzioni analitiche

$$R_\psi(z) = \langle \psi, (H_F - z)^{-1} \psi \rangle$$

$$R_\psi^0(z) = \langle \psi, (H_0 - z)^{-1} \psi \rangle,$$

definite per $\text{Im } z > 0$ ammettano un prolungamento analitico attraverso l'asse reale; un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ con $\text{Im } z_0 < 0$ tale che R_ψ^0 sia olomorfa in z_0 per ogni $\psi \in \mathcal{D}$ ed R_ψ abbia ivi un polo per qualche $\psi \in \mathcal{D}$ dicesi (polo di) risonanza per H_F ed il numero $-\text{Im } z_0$ dicesi ampiezza della risonanza.



N.B. Si osservi che nel caso in esame la funzione R_ψ^0 è definita ed olomorfa in tutto un intorno di λ_0 escluso al più λ_0 ed in tutto il semipiano $\text{Im } z < 0$; occorrerà dunque esaminare solamente la funzione R_ψ che a priori può non essere definita in nessun punto dell'asse reale. La definizione precedente è data in forma sufficientemente generale per poter considerare anche casi in cui l'autovalore λ_0 non è isolato.

Ebbene in molti casi si può dimostrare che vicino ad un autovalore isolato e di molteplicità finita m di H_0 si trovano esattamente m poli di risonanza di H_F almeno per F vicino a zero.

Lo studio successivo delle risonanze si articolerà in tre tappe [1, 2, 3, 6, 7, 11 e per un esposizione riassuntiva v. anche 12 e 16 ch XIII § 10]:

- I) Si introduce una famiglia olomorfa di operatori non autoaggiunti ottenuta dall'operatore H_F per "dilatazione" e di questa si cercano gli autovalori isolati.
- II) Si prova che tali autovalori coincidono con i poli di risonanza dell'operatore H_F secondo la definizione precedente.
- III) Si prova infine che i medesimi autovalori tendono agli autovalori di H_0 quando $F \rightarrow 0$; cioè i poli di risonanza di H_F sono "vicini" ai livelli energetici di H_0 .

Nel seguito considereremo due casi: il primo trattato in [2,6,11] nel quale $H_0 = -\Delta - \frac{Z}{r}$ e $W = x_1$; H_0 risulta essere l'Hamiltoniano di un elettrone attratto da un nucleo di massa infinita posto nell'origine (atomo d'idrogeno), mentre introducendo la perturbazione W si ottiene l'Hamiltoniano dello stesso sistema posto in un campo elettrico uniforme di intensità (proporzionale a) F e con direzione parallela all'asse x_1 (effetto Stark). Il secondo in cui $H_0 = \sqrt{1 - \Delta - \frac{Z}{r}}$ e $W = x_1$ trattato in [13] che fisicamente non è altro che il sistema precedente trattato nel caso relativistico.

Introduciamo alcune notazioni su cui generalmente non c'è concordanza. Se A è un operatore chiuso nello spazio di Hilbert H indichiamo con $\sigma(A)$ lo spettro di A , con $\sigma_p(A)$ l'insieme degli autovalori isolati di

molteplicità finita di A , con $\sigma_{\text{ess}}(A)$ l'insieme $\sigma(A) - \sigma_p(A)$ ed infine con $\sigma_w(A)$ l'insieme dei numeri $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che esista una successione caratteristica per $A - \lambda$: una successione cioè tale che $u_n \in D(A)$ e $\|u_n\| = 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} 0$ e $\|(A - \lambda)u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ricordiamo le seguenti proprietà di $\sigma_w(A)$ [17]:

- I) $\sigma_w(A)$ è chiuso
- II) $\sigma_w(A) \subseteq \sigma_{\text{ess}}(A)$
- III) $\text{Fr}(\sigma_{\text{ess}}(A)) \subseteq \sigma_w(A)$.

I. RISONANZE DELL'OPERATORE $-\Delta + Fx_1 - \frac{Z}{r}$

Esponendo i risultati ottenuti in [11] nel caso non relativistico ci soffermeremo sulle tecniche utilizzabili anche nel caso relativistico mentre ci limiteremo ad enunciare i risultati ottenuti sfruttando le particolari proprietà dell'operatore $-\Delta$.

Dal punto di vista matematico Avron ed Herbst [2] hanno notato che non conviene trattare Fx_1 come perturbazione di $-\Delta - \frac{Z}{r}$ giacché tale perturbazione non è piccola in alcun senso qualunque sia F ; conviene bensì considerare $-\frac{Z}{r}$ come perturbazione di $-\Delta + Fx_1$. Consideriamo quindi in primo luogo le proprietà di quest'ultimo operatore.

Poniamo

$$h(\alpha) = -\Delta + \alpha x_1 \quad D(h(\alpha)) = S(R^3) \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha notoriamente il

Teorema I.1

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ si ha

- a) $h(\alpha)$ è essenzialmente autoaggiunto
- b) $\sigma(\overline{h(\alpha)}) = \mathbb{R}$ ($\overline{h(\alpha)}$ indica la chiusura di $h(\alpha)$).

Per $\alpha \in \mathbb{C}$ si ha il seguente

Teorema I.2

Se $\alpha \in \mathbb{C}$ $\text{Im } \alpha \neq 0$ si ha

- a) $h(\alpha)$ ha range numerico $W(h(\alpha))$ contenuto nel semipiano $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re } z > \frac{\text{Re } \alpha}{\text{Im } \alpha} \text{Im } z\}$; in particolare è chidibile
- b) $\sigma(\overline{h(\alpha)}) = \emptyset$
- c) $\overline{h(\alpha)}^* = \overline{h(\overline{\alpha})}$
- d) $D(\overline{h(\alpha)}) = D(-\Delta) \cap D(x_1)$

Commento e traccia della dimostrazione. Osserviamo che evidentemente

$$W(h(\alpha)) \subseteq W(-\Delta) + W(\alpha x_1) = \mathbb{R}^+ + \{\alpha t; t \in \mathbb{R}\} = S_\alpha;$$

dunque $h(\alpha)$ è un operatore settoriale e quindi chiudibile [13: ch V th 3.4]: questo prova a). La prova di b) e c) è ottenuta calcolando esplicitamente il semigrupp $e^{-it h(\alpha)}$ mediante un procedimento di "separazione delle variabili" non applicabile al caso $\sqrt{1 - \Delta}$. La prova di d) si ottiene dimostrando che esistono tre costanti $a, b, c > 0$ tali che

$$(1) \quad \|h(\alpha)u\|^2 \geq a \|\Delta u\|^2 + b \|x_1 u\|^2 - c \|u\|^2 \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^3)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \|h(\alpha)u\|^2 &= \|\Delta u\|^2 + |\alpha|^2 \|x_1 u\|^2 + \langle (\Delta \alpha x_1 + \overline{\alpha} x_1 \Delta)u, u \rangle = \\ &= \|\Delta u\|^2 + |\alpha|^2 \|x_1 u\|^2 + \text{Re } \alpha \langle (\Delta x_1 + x_1 \Delta)u, u \rangle + \text{Im } \alpha \langle [\Delta, x_1] u, u \rangle \\ &\text{ma } \langle (x_1 \Delta + \Delta x_1)u, u \rangle \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\Delta u\|^2 + |\alpha| \|x_1 u\|^2 \text{ mentre } [\Delta, x_1] = 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$\text{onde } \|h(\alpha)u\|^2 \geq \left(1 - \frac{|\operatorname{Re} \alpha|}{|\alpha|}\right) \|\Delta u\|^2 + |\alpha|^2 \left(1 - \frac{|\operatorname{Re} \alpha|}{|\alpha|}\right) \|x_1 u\|^2 + \\ + 2 \operatorname{Im} \alpha < \frac{\partial}{\partial x_1} \psi, \psi >$$

Per ottenere la (1) è sufficiente minorare l'ultimo addendo col teorema di Ehrling e Nieremberg.

Osserviamo espressamente che la famiglia di operatori $\bar{h}(\alpha)$ $\operatorname{Im} \alpha > 0$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato [13: ch VII § 2.1], tuttavia ciò non è più vero per $\operatorname{Im} \alpha = 0$ giacché viene a mancare la condizione di costanza del dominio.

Siamo ora in grado di introdurre la perturbazione $-\frac{z}{r}$; osserviamo anzitutto che l'operatore di moltiplicazione per $-\frac{z}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $-\Delta$ [13: ch IV § 1.3].

Introduciamo in $L^2(\mathbb{R}^3)$ il gruppo, che chiameremo di dilatazione, definito da

$$(U(\theta)f)(x) = e^{3\theta/2} f(e^\theta x) \quad \theta \in \mathbb{R} \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Consideriamo poi i seguenti operatori, il secondo dei quali è quello che ci consentirà di compiere la prima tappa delle tre in cui abbiamo suddiviso lo studio delle risonanze:

$$H_0(F, \theta) = U(\theta) (-\Delta + Fx_1) U(\theta)^{-1} = -e^{-2\theta} \Delta + Fe^\theta x_1 \\ H(F, \theta) = H_0(F, \theta) - U(\theta) \frac{z}{r} U(\theta)^{-1} = -e^{-2\theta} \Delta + Fe^\theta x_1 - \frac{e^{-\theta} z}{r}.$$

Evidentemente $H_0(F, \theta)$ ed $H(F, \theta)$ sono unitariamente equivalenti rispettivamente ad $H_0(F, 0)$ ed $H(F, 0)$ $\theta \in \mathbb{R}$; è inoltre noto che $H(F, \theta)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ [15: ch X § 5].

In quanto segue supporremo $F > 0$ fissato ed osserviamo che la famiglia di operatori $H_0(F, \theta)$ definita per $\theta \in \mathbb{R}$ ammette un prolungamento per $\theta \in \mathbb{C}$ e che in virtù del teorema I.2 la famiglia $H_0(F, \theta)$ $\theta \in \mathbb{C}$ $0 < \operatorname{Im} \theta < \frac{\pi}{2}$

$D(H_0(F, \theta)) = D(-\Delta) \cap D(x_1)$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato ed è costituita da operatori con spettro vuoto. Siamo ora in grado di considerare anche $H(F, \theta)$ con $\theta \in \mathbb{C}$ e $0 < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2}$; tale operatore ci permetterà di ottenere il prolungamento analitico che compare nella definizione di risonanza. Le osservazioni precedenti ci permettono di provare il seguente

Teorema I.3

La famiglia $H(F, \theta)$ $D(H(F, \theta)) = D(H_0(F, \theta))$, $\theta \in \mathbb{C}$ $0 < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2}$ è una famiglia olomorfa di tipo A nel senso di Kato ed è costituita da operatori chiusi con spettro discreto ed indipendente da θ inoltre la molteplicità di ciascun autovalore è indipendente da θ .

Dimostrazione. Per quanto riguarda l'olomorfia la prova si ottiene osservando che giacché $\frac{e^{-\theta z}}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $-\Delta$ tale è anche rispetto ad $H_0(F, \theta) \forall \theta \in \mathbb{C}$ $0 < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2}$ in virtù della (1) e quindi $H(F, \theta)$ è una famiglia olomorfa di operatori chiusi con spettro discreto [13: ch IV th. 1.11 e th 5.35].

Fissiamo ora θ_0 e supponiamo che λ sia un autovalore di $H(F, \theta_0)$ di molteplicità p , allora se θ è vicino a θ_0 , $H(F, \theta)$ ha esattamente p autovalori (contando le eventuali molteplicità) vicino a λ ed essi sono dati dalle determinazioni di una o più funzioni analitiche $f_1(\theta), \dots, f_h(\theta)$ con al più un punto di diramazione algebrico in θ_0 [13: ch VII th. 1.8]; d'altra parte se $\Phi \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} H(F, \theta_0 + \Phi) &= U(\theta_0 + \Phi) H(F, 0) U(\theta_0 + \Phi)^{-1} = U(\Phi) U(\theta_0) H(F, 0) U(\theta_0)^{-1} U(\Phi)^{-1} = \\ &= U(\Phi) H(F, \theta_0) U(\Phi)^{-1}. \end{aligned}$$

Dunque $H(F, \theta_0 + \Phi)$ è unitariamente equivalente ad $H(F, \theta_0) \forall \Phi \in \mathbb{R}$ onde $f_i(\theta_0 + \Phi) = \lambda \quad \forall \Phi \in \mathbb{R}$ e, per l'analiticità di f_i , questo significa che $f_i \equiv \lambda \quad i = 1, \dots, h$. Di qui l'indipendenza degli autovalori da θ (compresa la molteplicità).

La seconda tappa, ovvero il legame fra gli autovalori di $H(F, \theta)$ e le risonanze di $H(F, 0)$, è dato dal seguente

Teorema I.4

Gli autovalori di $H(F, \theta)$ giacciono in $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < 0\}$ e sono tutte e sole le risonanze di $H(F, 0)$.

Dimostrazione. Riportiamo una dimostrazione semplificata in forza di alcune idee tratte da [5,6]. Consideriamo l'insieme $N = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) : U(\theta)\psi \text{ si prolunga in una funzione olomorfa definita per } |\text{Im } \theta| < \frac{\pi}{2}\}$. Si può provare che N è denso in $L^2(\mathbb{R}^3)$ [15: ch XIII § 10]; consideriamo pertanto la funzione

$$(2) \quad f_{\psi}(z, \theta) = \langle U(\theta)\psi, (z - H(F, \theta))^{-1} U(\theta)\psi \rangle.$$

Evidentemente la funzione $z \rightarrow f_{\psi}(z, \theta)$ è olomorfa in $\mathbb{C} - \sigma(H(F, \theta))$ (e meromorfa in \mathbb{C}); anche la funzione $\theta \rightarrow f_{\psi}(z, \theta)$ è olomorfa in $0 < \text{Im } \theta < \frac{\pi}{2}$, d'altra parte se $\Phi \in R$ $U(\Phi)$ è una trasformazione unitaria onde

$$\begin{aligned} f_{\psi}(z, \theta + \Phi) &= \langle U(\Phi) U(\theta)\psi, U(\Phi) (z - H(F, \theta))^{-1} U(\Phi)^{-1} U(\Phi) U(\theta)\psi \rangle = \\ &= f_{\psi}(z, \theta) \end{aligned}$$

Dunque $f_{\psi}(z, \theta)$ è costante rispetto a θ .

Se ora avessimo provato che $H(F, \theta)$ tende ad $H(F, \text{Re } \theta)$ per $\text{Im } \theta \rightarrow 0$ in senso forte generalizzato [13: ch VIII § 1] evidentemente si avrebbe

$$f_{\psi}(z, \theta) = f_{\psi}(z, \text{Re } \theta) = \langle \psi, (z - H(F, 0))^{-1} \psi \rangle = R_{\psi}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

con $\text{Re } z < z_0$ $\text{Im } z < 0$. Per le proprietà di analiticità (rispetto a z) tale uguaglianza vale $\forall z \in \mathbb{C}$ $\text{Im } z > 0$; questo prova che gli autovalori di $H(F, \theta)$ giacciono nel semipiano $\text{Im } z < 0$, mentre d'altra parte $f_{\psi}(z, \theta)$ fornisce il cercato prolungamento di R_{ψ} al semipiano $\text{Im } z < 0$ che ha po-

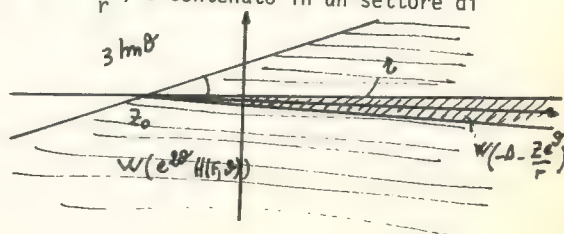
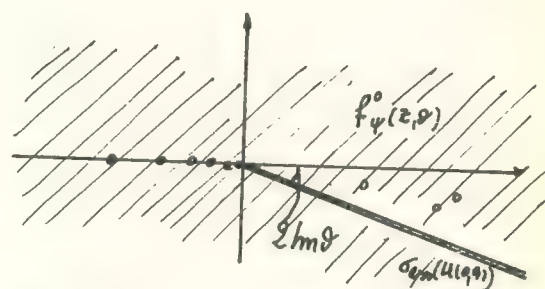
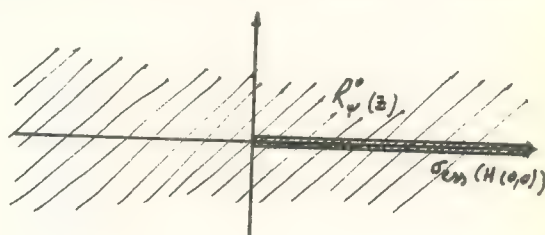
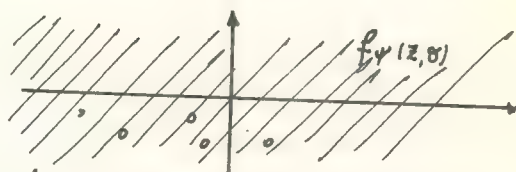
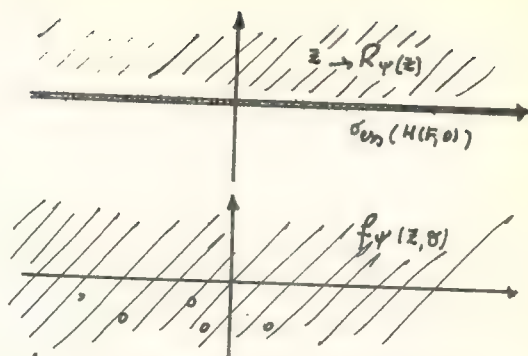
li in ciascun autovalore di $H(F, \theta)$ se ψ è opportuno. Poi ché in modo analogo si può provare che $\forall z \in \mathbb{C} \operatorname{Im} z > 0$ risulta

$$(3) \quad R_{\psi}^{\circ}(z) = \langle \psi, (z - H(0, 0))^{-1} \psi \rangle = \langle U(\theta)\psi, (z - H(0, \theta))^{-1} U(\theta)\psi \rangle = f_{\psi}^{\circ}(z, \theta)$$

e quest'ultima funzione è meromorfa in $\mathbb{C} - \sigma_{\text{ess}}(H(0, \theta))$ $\forall \psi \in N$ ed ha poli in ciascun autovalore di $H(0, \theta)$ se ψ è opportuno, si ha subito che $z \rightarrow f_{\psi}^{\circ}(z, \theta)$ è olomorfa in tutto il settore $-2 \operatorname{Im}(\theta) > \arg z > -\pi$.

Proviamo infine che $H(F, \theta)$ tende ad $H(F, \theta_0)$ se $\theta_0 = \operatorname{Re} \theta$ in senso forte generalizzato se $\operatorname{Im} \theta \rightarrow 0$.

Poiché $-\frac{Z}{r}$ è relativamente compatto rispetto a $-\Delta$, fissati $\theta > 0$ ed $\eta > 0$ si può trovare $z_0 \in \mathbb{R}$ tale che $W(-\Delta - \frac{Ze^{\theta}}{r})$ è contenuto in un settore di vertice z_0 , semiasse $\{z \in \mathbb{C}; \arg z = 0\}$ e semiampiezza $\eta \forall \theta \in \mathbb{C}$ $0 < |\theta - \theta_0| < \delta$; se dunque $\eta < \operatorname{Im} e^{3\theta}$ si ha



$W(-\Delta - \frac{Ze^{\theta}}{r} + e^{3\theta} F x_1) \subseteq \{z \in \mathbb{C}; \arg(z - z_0) \in [-\pi + 3 \operatorname{Im} \theta, 3 \operatorname{Im} \theta]\}.$
 Ciò assicura che ogni punto della regione $K = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < z_0\}$
 ha distanza positiva da $\bigcup_{0 < \operatorname{Im} \theta < \delta} W(e^{2\theta} H(F, \theta))$; se quindi z è uno di tali
 punti risulta $\|e^{-2\theta} (H(F, \theta) - z)^{-1}\| < 1/\operatorname{dist}(z, K) \forall \theta \in \mathbb{C} \ 0 < \operatorname{Im} \theta < \delta.$
 Poiché se $\theta_0 = \operatorname{Re} \theta$ $e^{2\theta} H(F, \theta) u \rightarrow e^{2\theta_0} H(F, \theta_0) u$ per $\operatorname{Im} \theta \rightarrow 0 \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$
 che è un core di $H(F, \theta)$, da [13: ch VIII th. 1.5] segue la convergenza
 forte.

Abbiamo così completato la seconda tappa; per quanto riguarda
 la terza riportiamo senza dimostrazione il seguente risultato di stabili-
 tà che si ottiene sfruttando la relativa compattezza di $\frac{1}{r}$ rispetto a
 $-\Delta$ [11: th III.3].

Teorema I.5

Sia λ_0 un autovalore negativo di $H(0, 0) = -\Delta - \frac{Z}{r}$ di moltepli-
 cità j , allora se F è piccolo ci sono esattamente j autovalori di $H(F, \theta)$
 ($\operatorname{Im} \theta > 0$) vicini a λ_0 che convergono a λ_0 per $F \rightarrow 0$.

Quest'ultimo teorema assicura che le risonanze di $H(F, 0)$ sono
 vicine agli autovalori di $H(0, 0)$ e che la loro ampiezza tende a zero quan-
 do $F \rightarrow 0$.

II. I RISULTATI DI ENSS HUNZIKER E VOCK

Se A è un operatore lineare chiuso nello spazio di Hilber H e
 $\lambda \in \sigma_w(A)$, allora per definizione esiste una successione caratteristica
 per $A - \lambda$; tale successione non è unica e ciò lascia in molti casi la pos-
 sibilità di costruirne una con alcune proprietà prefissate. Il seguente
 teorema fornisce lo strumento per modificare una successione caratteri-
 stica data.

Teorema II.1 (di Enss) [5: cfr. anche 17]

Sia A un operatore chiuso nello spazio di Hilbert H con $\rho(A) \neq \emptyset$ e sia $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di operatori equilimitati su H con le seguenti proprietà

- (i) Se $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione caratteristica per $A - \lambda$, allora esiste $a > 0$ tale che

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|M_n u_m\| > a \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- (ii) $M_n(D(A)) \subseteq D(A)$ e $[M_n, A]u = B_n u + K_n u$ essendo $K_n(z - A)^{-1}$ un operatore compatto e $\|B_n(z - A)^{-1}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ per uno (e quindi tutti

gli) $z \in \rho(A)$.

Allora se $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione caratteristica per $\lambda - A$ tale è anche $v_n = M_n u_{m(n)} / \|M_n u_{m(n)}\|$ se $m(n)$ è sufficientemente grande $\forall n \in \mathbb{N}$.

Non proveremo questo teorema bensì un suo caso particolare in cui lo spazio $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, l'operatore A è del tipo $A = -\Delta + V$ con $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che A sia chiuso e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sia un suo core.

Teorema II.2

Sia A un operatore del tipo descritto e supponiamo che esista $c > 0$ tale che

$$(4) \quad \|(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u\| < c \|Au\| \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Allora se $\lambda \in \sigma_w(A)$ si può costruire una successione caratteristica $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ per $A - \lambda$ tale che $v_n(x) = 0 \quad \forall x \in S(n)$.

Dimostrazione. Se $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\chi(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \cdot |x| < 1$ poniamo $\chi_n(x) = \chi(\frac{x}{n})$ e $M_n(x) = 1 - \chi_n(x)$. Poiché $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è un core di A , se $\lambda \in \sigma_w(A)$ si può trovare una successione caratteristica $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ per $\lambda - A$: vogliamo provare che la successione $v_n = M_n u_{m(n)} / \|M_n u_{m(n)}\|$

è una successione caratteristica per $\lambda - A$ se $m(n)$ è sufficientemente grande $\forall n \in \mathbb{N}$. Da (4) segue che la successione $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_m$ è limitata mentre l'operatore $\chi_n (1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}}$ è compatto $\forall n \in \mathbb{N}$ onde

$$\chi_n u_m = (\chi_n (1 - \Delta)^{-\frac{1}{2}}) ((1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dunque $\|M_n u_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; se $m(n) \in \mathbb{N}$ è tale che $\|M_n u_{m(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ si ha

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda) v_n\| &= \|(A - \lambda) \frac{M_n u_{m(n)}}{\|M_n u_{m(n)}\|}\| = \\ &= \frac{1}{\|M_n u_{m(n)}\|} (\|M_n (A - \lambda) u_{m(n)}\| + \|[M_n, A] u_{m(n)}\|) \end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente i due addendi

$$\|M_n (A - \lambda) u_{m(n)}\| \leq \|(A - \lambda) u_{m(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} \|[M_n, A] u_{m(n)}\| &= \left\| -\frac{1}{n} \langle \nabla \chi \rangle \left(\frac{x}{n}\right), \nabla u_{m(n)} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{n^2} \langle \Delta \chi \rangle \left(\frac{x}{n}\right) u_{m(n)}\| \leq \frac{1}{n} \sup |\nabla \chi| \|(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_{m(n)}\| + \\ &+ \frac{1}{n^2} \sup |\Delta \chi| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

giacché il fattore $\|(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_{m(n)}\|$ contenuto nel primo addendo è limitato uniformemente rispetto ad $n \in \mathbb{N}$ in virtù di (4).

Osserviamo che il teorema precedente continua a valere se in luogo di $A = -\Delta + V$ si considera un operatore del tipo $A = \sqrt{1 - \alpha \Delta} + V$ essendo $\alpha \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ purché A soddisfi ancora le medesime ipotesi di detto teorema: in particolare cioè A è chiuso soddisfa (4) e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è un suo core. Per provare tale affermazione sarà sufficiente provare che anche in questo caso

$$(5) \quad \|[M_p, A] u_{m(p)}\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

A tal fine esprimiamo il commutatore che appare in (5) mediante un integrale oscillante

$$\begin{aligned}
 [M_p, A] u(x) &= [\chi_p(x), \sqrt{1 - \alpha \Delta}] u(x) = \\
 &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (\chi_p(x) - \chi_p(y)) \sqrt{1 + \alpha |\xi|^2} u(y) dy d\xi = \\
 &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \chi_p}{\partial x_j} (x+t(y-x)) (x_j - y_j) \right) dt \sqrt{1 + \alpha |\xi|^2} u(y) dy d\xi = \\
 &= (2\pi)^{-n} \iint \sum_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \int_0^1 \frac{\partial \chi_p}{\partial x_j} (x+t(y-x)) dt \right) \sqrt{1 + \alpha |\xi|^2} u(y) dy d\xi = \\
 &= (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \left(\frac{x+t(y-x)}{p} \right) dt \frac{\alpha \xi_j}{(1 + \alpha |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) u(y) dy d\xi
 \end{aligned}$$

Possiamo ora porre $[M_p, A] = \frac{1}{p} A_p$ ove A_p è l'operatore pseudodifferenziale con simbolo completo in tre variabili

$$a_p(x, y, \xi) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \left(\frac{x+t(y-x)}{p} \right) dt \frac{\alpha \xi_j}{1 + \alpha |\xi|^2} \right)$$

se poniamo $\psi(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/4}$ si ottiene

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_p(x, y, \xi)| + |\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta a_p(x, y, \xi)| < c \psi(\xi)^{|\alpha| - |\beta|} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

e per ogni α, β con $|\alpha| < 2(1 + [n/2])$ $|\beta| < 2(1 + [n/2])$: sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema di Calderon e Vaillancourt [4: th. 10.3] e la costante c è indipendente da $p \in \mathbb{N}$; A_p è dunque un operatore limitato in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ed esiste $C > 0$ tale che $\|A_p\| < C \quad \forall p \in \mathbb{N}$. Questo prova che

$$\| [M_p, A] \| \leq \frac{1}{p} C \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Donde la (5).

Una nozione analoga a quella di successione caratteristica può essere introdotta anche nel caso in cui anziché considerare un solo operatore si consideri una famiglia di operatori chiusi; noi considereremo una famiglia del tipo $A(F) = -\Delta + V(F)$ oppure $A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ ($\alpha \in \mathbb{C} - [-\infty, 0]$) ove $V(F) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $F \in \Omega$ (Ω è un sottinsieme di \mathbb{R}^m), $V(F)$ è tale che $A(F)$ sia chiuso, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o $S(\mathbb{R}^n)$) sia un core di $A(F)$ e $A(F)^*$ e lo spettro di $A(F)$ sia contenuto in un semipiano indipendente da $F \in \Omega$. Supponiamo che $V(F) \xrightarrow{F \rightarrow F_0} V_0$ nella topologia di $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$; allora $A(F)$ tende ad $A_0 = -\Delta + V_0$ (oppure $A_0 = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V_0$) in senso forte generalizzato per $F \rightarrow F_0$ [13: ch VIII th. 1.5]; indichiamo con Δ_b il dominio di limitatezza della famiglia $A(F)$ $F \in \Omega$ [13: ch VIII § 1.1]. Allora vale il seguente

Lemma II.1. Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $z \notin \sigma_{\text{ess}}(A(F))$ per F vicino a F_0 . Se $z \notin \sigma_p(A_0)$ vale la seguente alternativa

o i) $z \in \Delta_b$

oppure (ii) esistono due successioni $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ in Ω e

$(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o in $S(\mathbb{R}^n)$) tali che

$$F_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} F_0, u_p \in D(A(F_p)) \text{ e } \|u_p\| = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

$$u_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{w} 0 \text{ e } \|(A(F_p) - z)u_p\| \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$$

Non riportiamo la dimostrazione di tale lemma perché di carattere elementare [17: lemma 5.1].

Teorema II.3 (di Hunziker e Vock)

Se $A(F)$ $F \in \Omega$ è una famiglia di operatori che soddisfa le ipotesi del lemma precedente ed inoltre esiste una costante $C > 0$ tale che

$$(6) \quad \|(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u\| \leq c \|A(F) u\| \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \forall F \in \Omega,$$

allora l'alternativa (ii) del lemma precedente vale con una successione

$(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tale che $u_p(x) = 0$ se $|x| \leq p \quad \forall p \in \mathbb{N}$.

Traccia della dimostrazione. Siano $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ed $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ le due successioni la cui esistenza è assicurata da (ii) del precedente lemma.

Proviamo che la successione

$$v_m = \frac{M_m u_{p(m)}}{\|M_m u_{p(m)}\|} \quad m \in \mathbb{N}$$

e la successione $(F_{p(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ soddisfano ancora le condizioni di (ii) purché $p(m)$ sia sufficientemente grande $\forall m \in \mathbb{N}$. Da (6) segue che la successione $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_p \quad p \in \mathbb{N}$ è limitata e quindi come nella prima parte del teorema II.2 si trae che $\chi_m u_p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\|M_m u_{p(m)}\| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 1$$

purché $p(m)$ sia sufficientemente grande $\forall m \in \mathbb{N}$.

D'altra parte

$$\begin{aligned} & \| (A(F_{p(m)}) - z) v_m \| \leq \\ & \leq \frac{1}{\|M_m u_{p(m)}\|} (\|M_m (A(F_{p(m)}) - z) u_{p(m)}\| + \|[M_m, A(F_{p(m)})] u_{p(m)}\|) \end{aligned}$$

Il primo addendo tende evidentemente a zero mentre il commutatore

$$[M_m, A(F_{p(m)})] = [\chi_m, -\Delta]$$

si tratta come nel teorema II.2. Nel caso invece in cui

$A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ si ha

$$[M_m, A(F_{p(m)})] = [\chi_m, \sqrt{1 - \alpha\Delta}]$$

e questo si tratta come (5) dimostrando che è un operatore limitato in $L^2(\mathbb{R}^n)$ che tende a zero in norma quando $m \rightarrow +\infty$.

Utilizziamo il risultato precedente per studiare la stabilità degli autovalori isolati e di molteplicità finita dell'operatore A_0 . Per la definizione di autovalore stabile rimandiamo alle condizioni I) e II) dell'introduzione [cfr. 13: ch VIII § 1.4]. Se $A(F)$ $F \in \Omega$ è una famiglia di operatori che soddisfano le condizioni del teorema precedente, poniamo $S(\rho)$ indica la sfera di raggio ρ

$$d_n(\lambda, F) = \inf \{ \|(\lambda - A(F)) u \| ; u \in D(A(F)), \|u\| = 1, \text{supp } u \cap S(n) = \emptyset \}$$

Teorema II.4 (di stabilità di Hunziker e Vock [cfr. 17 th. 1.1])

Sia $A(F)$ $F \in \Omega$ una famiglia di operatori che soddisfa le condizioni del teorema II.3. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che esistano $n_0 \in \mathbb{N}$ $\delta > 0$ ed un intorno W di F_0 in Ω tali che

$$\text{I) } \text{dist}(\lambda, \sigma_{\text{ess}}(A(F))) \geq \delta$$

$$\text{II) } d_n(\lambda, F) > \delta$$

$\forall n \geq n_0 \quad \forall F \in W$. Allora vale la seguente alternativa

$$\text{o (i) } \lambda \notin \sigma_p(A_0) \text{ e allora } \lambda \in \Delta_b$$

oppure (ii) $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ e allora λ è un autovalore stabile per la famiglia $A(F)$ quando $F \rightarrow F_0$.

Nota. Nel seguito riportiamo la dimostrazione per il caso

$A(F) = -\Delta + V(F)$ osservando che nel caso $A(F) = \sqrt{1 - \alpha\Delta} + V(F)$ l'unica modifica necessaria è quella da apportare alla valutazione del termine $\| [A(F_m), M_n] v_m \|$ che compare nell'espressione contrassegnata da (*) che si maggiore in questo caso con $\| [\sqrt{1 - \alpha\Delta}, \chi_n] \|$, quantità che tende a zero per $n \rightarrow +\infty$ in virtù della dimostrazione del teorema II.2.

Dimostrazione. (i) Se per assurdo $\lambda \notin \sigma_p(A_0)$ e $\lambda \notin \Delta_b$, allora è verificata la seconda alternativa del teorema II.3 e questo contraddice l'ipotesi II).

(ii) Se $\lambda \in \sigma_p(A_0)$ allora esiste $\eta > 0$ tale che se $\eta > |z - \lambda| > 0$ risulta $z \notin \sigma_p(A_0)$, $z \notin \sigma_{ess}(A(F))$ e

$$(7) \quad d_n(z, F) \geq \delta/2 \quad - \quad \forall n > n_0 \quad \forall F \in U,$$

inoltre per la parte (i) si ha che $z \in \Delta_s$: vale dunque la condizione I) della definizione (cfr. p. 3). Supponiamo per assurdo che non valga la condizione II), allora esistono due successioni $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in Ω e $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in H tali che $\|u_m\| = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ e

$$P(F_m) u_m = u_m \quad \text{mentre} \quad P_0 u_m = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Al più passando ad una sottosuccessione si può supporre che $u_m \xrightarrow{w} u$; d'altra parte da II) segue che

$$u_m = P(F_m) u_m \xrightarrow{w} P_0 u \quad \text{e} \quad 0 = P_0 u_m \xrightarrow{w} P_0 u$$

Di qui segue che $u = P_0 u = 0$. Se in II) fissiamo r tale che $d_n(z, F_m) \geq d_n(\lambda, F_m) - r > \delta/2$ se $|z - \lambda| = r$ ed m ed n sono sufficientemente grandi e poniamo $v_m(z) = (z - A(F_m))^{-1} u_m$ da (7) si ottiene

$$(*) \quad \delta/2 \|M_m v_m\| \leq \|(A(F_m) - z)M_n v_m\| \leq \|M_n u_m\| + \|[A(F_m), M_n] v_m\|$$

esaminiamo l'ultimo addendo tenendo presente la (5)

$$\| [A(F_m), M_n] v_m \| = \| [-\Delta, \chi_n] v_m \| <$$

$$< c \frac{1}{n} \| \nabla(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \| \| (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}(z-A(F_m)) \| \| u_m \| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

uniformemente rispetto ad m e z $|z - \lambda| = r$. Applicando l'operatore $\delta/2 M_n$ al vettore $u_m = P(F_m) u_m = (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} v_m(z) dz$ si ottiene

$$\delta/2 \| M_n u_m \| \leq (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} \| M_n u_m \| dz + (2\pi i)^{-1} \int_{|z-\lambda|=r} \| [-\Delta, M_n] v_m(z) \| dz$$

Poiché il secondo addendo del secondo membro della precedente disuguaglianza tende a zero per $n \rightarrow +\infty$ uniformemente rispetto ad m , dall'essere $r < \delta/2$ segue subito

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \| M_n u_m \| = 0$$

D'altra parte per la parte (i) della dimostrazione risulta che $A(F) P(F)$ è un operatore limitato in un intorno di F_0 , dunque

$A(F_m) u_m = A(F_m) P(F_m) u_m \in N$ è una successione limitata e quindi per (5) risulta limitata anche la successione $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}} u_m \in N$, per la compattezza dell'operatore $\chi(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ si ha pertanto

$$\| \chi_n u_m \| = \| \chi_n (1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} (1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_m \| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall n \in N$$

questo implica che $\lim_{m \rightarrow \infty} \| M_n u_m \| = 1 \quad \forall n \in N$ e ciò contraddice (8).

Osservazione. Il teorema precedente consente di provare il teorema I.5 senza far ricorso alla compattezza di $\frac{z}{r}$ rispetto a $-\Delta$. Poniamo infatti $A(F) = -\Delta + e^{3\theta} F \chi_1 - e^{\theta} \frac{z}{r} = e^{2\theta} H(F, \theta)$ ed osserviamo che per il teorema I.3 e la stima (1) si ha subito che $A(F) \cdot F > 0$ soddisfa le ipotesi del teorema II.3 mentre $\forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ dist}(\lambda, \sigma_{\text{ess}}(A(F))) = +\infty$ $\forall F > 0$; per poter applicare il teorema II.4 è sufficiente dimostrare

che se λ è un autovalore di $H(0, \theta)$ (e quindi $e^{2\theta} \lambda$ è un autovalore di A_0), risulta

$$d_n(e^{2\theta} \lambda, F) > 0 \quad \forall n > n_0 \quad \forall F > 0.$$

A tal fine osserviamo che

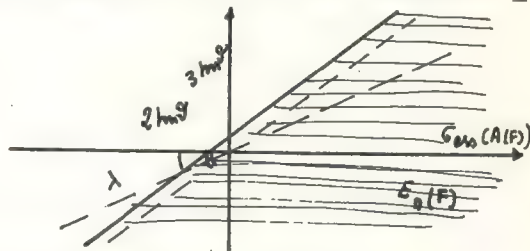
$$\begin{aligned} d_n(e^{2\theta} \lambda, F) &= \inf \| (e^{2\theta} \lambda - A(F))u \| \geq \inf | \langle (e^{2\theta} \lambda - A(F))u, u \rangle | = \\ &= \text{dist}(e^{2\theta} \lambda, E_n(F)) \end{aligned}$$

essendo $E_n(F) = \{ \langle A(F)u, u \rangle; u \in D(A(F)), \|u\| = 1, \text{supp } u \cap S(n) = \emptyset \}$.

Poiché $E_n(F) \subseteq \{ \langle -\Delta u, u \rangle; u \in D(A(F)) \dots \} + \{ e^{3\theta} F \langle x_1 u, u \rangle \dots \} + \{ e^\theta z \langle \frac{1}{r} u, u \rangle; u \dots \}$ e gli autovalori di $H(0, \theta)$ sono contenuti nell'asse reale negativo si

ottiene subito che

$$d_n(\lambda, F) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda \sin(\text{Im } \theta)$$



Osserviamo infine che il presente ragionamento non permette di provare la stabilità di eventuali autovalori di $H(0, \theta)$ con parte reale positiva che potrebbero presentarsi quando si sostituisca a $-\frac{z}{r}$ un potenziale più generale.

Per quanto riguarda i risultati di Hunziker e Vock nella loro forma generale si rimanda direttamente a [17: th. 5.5].

III. RISONANZE DELL'OPERATORE $\sqrt{1 - \Delta} + Fx_1 - \frac{z}{r}$

Anche in questo caso conviene trattare $-\frac{z}{r}$ come perturbazione dell'operatore $H_0(F) = \sqrt{1 - \Delta} + Fx_1$. Si può dimostrare il

Teorema III.1

L'operatore $H_0(F)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^\infty(R^3)$. Se $F > 0$ $\sigma(\overline{H}_0(F)) = R$.

Come nel caso precedente poniamo

$$H_0(F, \theta) = U(\theta) H_0(F) U(\theta)^{-1} \quad D(H_0(F, \theta)) = S(R^n) \quad \theta \in R.$$

Tale famiglia di operatori può essere definita anche per $\theta \in U$, essendo $U = \{\theta \in C; |\theta| < \delta, |\arg \theta - \pi/2| < \delta\}$; in quest'ultimo caso le sue proprietà sono date da

Teorema III.2

Esiste $\delta > 0$ tale che se $\theta \in U$

a) il range numerico di $H_0(F, \theta)$ è contenuto nel semipiano

$$\Sigma = \{z \in C; \arg(z - 1) \in [-\pi + \operatorname{Im} \theta, \operatorname{Im} \theta]\};$$

b) la sua chiusura è un operatore m -settoriale che indicheremo con $\overline{H}_0(F, \theta)$;

c) $D(\overline{H}_0(F, \theta)) = D(\sqrt{1 - \Delta}) \cap D(x_1)$.

Dimostrazione. Poiché l'operatore $\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta$ è normale, risulta [9: probl. 117] $W(\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta) = \overline{\operatorname{co}}(\sigma_{\text{ess}}(\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta))$ ove $\overline{\operatorname{co}}(A)$ indica la chiusura dell'involucro convesso di A ; d'altra parte utilizzando la trasformata di Fourier [18] si ottiene che $\sigma_{\text{ess}}(\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta) = \{\sqrt{1 + e^{-2\theta}} t; t \in R^+ \cup \{0\}\}$ e quindi

$$W(H_0(F, \theta)) \subseteq W(\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta) + W(e^\theta x_1) \subseteq \Sigma.$$

Per quanto riguarda il dominio di $\bar{H}_0(F, \theta)$ si può provare che esistono tre costanti positive a, b, c , tali che

$$(9) \quad \|H_0(F, \theta)u\|^2 \geq a \|\sqrt{1-\Delta} u\|^2 + b \|x_1 u\|^2 - c \|u\|^2 \quad \forall u \in S(R^3).$$

Si procede come nella dimostrazione di (1) osservando che

$$\begin{aligned} \|(\sqrt{1-\Delta} + F e^\theta x_1)u\|^2 &\geq \|\sqrt{1-\Delta} u\|^2 + F^2 |e^\theta|^2 \|x_1 u\|^2 + \\ &+ F \operatorname{Re} e^\theta \langle (\sqrt{1-\Delta} x_1 + x_1 \sqrt{1-\Delta})u, u \rangle + F \operatorname{Im} e^\theta \langle [\sqrt{1-\Delta}, x_1]u, u \rangle \\ \forall u \in S(R^3). \text{ Poiché } F[x_1, (1-\Delta)^{\frac{1}{2}}] F^{-1} &= [\sqrt{1+|\xi|^2}, -i \frac{\partial}{\partial \xi_1}] = \\ &= -i \xi_1 (1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ è un operatore limitato e poiché} \end{aligned}$$

$$\|(1-e^{2\theta}\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1-\Delta)^{\frac{1}{2}} u\| \leq \|(1-e^{2\theta}\Delta)^{\frac{1}{2}}(1-\Delta)^{-\frac{1}{2}} - 1\| \|(1-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\| < \varepsilon \|\sqrt{1-\Delta} u\|$$

se θ è sufficientemente vicino a zero, la disuguaglianza (9) è provata.

Per provare che $\bar{H}_0(F, \theta)$ è m -settoriale è sufficiente provare che se $z \in \mathbb{C} - \Sigma$ allora $z - H_0(F, \theta)$ ha codominio denso. Siano dunque $f \in C_0^\infty(R^3)$ ed $\varepsilon > 0$; dimostriamo che esiste $g \in C_0^\infty(R^3)$ tale che

$$(10) \quad \|(z - H_0(F, \theta))g - f\| < \varepsilon.$$

Utilizziamo un adattamento di [17: th. 6.1 (iii)] ed osserviamo anzitutto che se $\chi \in C_0^\infty(R^3)$ con $0 \leq \chi \leq 1$, l'operatore di moltiplicazione $F e^\theta x_1 \chi(x)$ è limitato in $L^2(R^3)$; consideriamo le forme

$$\begin{aligned} t[u] &= \langle \sqrt{1 - e^{-2\theta} \Delta} u, u \rangle & D(t) &= W^{\frac{1}{2}}(R^3) \\ a[u] &= \langle F e^\theta x_1 \chi(x)u, u \rangle & D(a) &= L^2(R^3); \end{aligned}$$

per esse valgono le ipotesi di [13: ch VI th. 3.4] e dunque $t + a$ è una forma strettamente settoriale chiusa. Poiché evidentemente l'operatore $A_\chi = \sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta + F e^\theta x_1 \chi(x)$ $D(A_\chi) = W^1(R^3)$ è l'operatore associato alla forma $t + a$ [13: ch. VI § 2.1] esso è strettamente m -settoriale ed il suo range numerico è contenuto in Σ ; in particolare [13: ch. V th. 3.2]

$$(11) \quad \|(z - A_\chi)^{-1}\| < \frac{1}{\text{dist}(z, \Sigma)} \quad \forall z \in \mathbb{C} - \Sigma.$$

Poiché $C_0^\infty(R^3)$ è un core di $\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta$, tale è anche per A_χ [13: ch. IV th. 1.1]; possiamo pertanto determinare $h_\chi \in C_0^\infty(R^3)$ tale che

$$(12) \quad \|(z - A_\chi)h_\chi - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da (11) e (12) si ottiene

$$(13) \quad \|h_\chi\| < (\|f\| + \frac{\varepsilon}{2}) (\text{dist}(z, \Sigma))^{-1} = d$$

ove d è indipendente da χ ed h_χ .

Supponiamo di poter scegliere $\Lambda \in C_0^\infty(R^3)$ con $0 \leq \Lambda \leq 1$,

$\Lambda f = f$ e

$$(14) \quad \|[\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta, \Lambda]\| < \frac{\varepsilon}{2d};$$

scegliamo allora χ tale che $\chi\Lambda = \Lambda$ e da (12) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> \|\Lambda (z - A_\chi)h_\chi - f\| = \|(z - Fe^\theta x_1)\Lambda h_\chi - \Lambda \sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta h_\chi - f\| \geq \\ &\geq \|(z - H_0(F, \theta))\Lambda h_\chi - f\| - \|[\sqrt{1 - e^{-2\theta}} \Delta, \Lambda]\| \|h_\chi\| \end{aligned}$$

Da quest'ultima, da (13) e (14) si conclude che la funzione $g = \Lambda h_\chi$ soddisfa (10).

Proviamo infine che (14) può essere soddisfatta esprimendo il commutatore che vi compare mediante un integrale oscillante.

$$\begin{aligned}
[\sqrt{1-e^{-2\theta}} \Delta, \Lambda] u(x) &= (2\pi)^{-3} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (\Lambda(y) - \Lambda(x)) (1+e^{-2\theta} |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} u(y) dy d\xi = \\
&= (2\pi)^{-3} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \int_0^1 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} (x + t(y-x)) (x_j - y_j) \right) dt (1+e^{-2\theta} |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} u(y) dy d\xi = \\
&= (2\pi)^{-3} \sum_{j=1}^3 \iint i \frac{\partial}{\partial \xi_j} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \int_0^1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} (x + t(y-x)) dt (1+e^{-2\theta} |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} u(y) dy d\xi = \\
&= (2\pi)^{-3} \iint e^{i\langle x-y, \xi \rangle} \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} (x + t(y-x)) dt \frac{-i e^{-2\theta} \xi_j}{(1+e^{-2\theta} |\xi|^2)^{\frac{3}{2}}} \right) u(y) dy d\xi
\end{aligned}$$

Dunque il commutatore in questione è un operatore pseudodifferenziale con simbolo

$$a(x, y, \xi) = \sum_{j=1}^3 \left(\int_0^1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} (x + t(y-x)) dt \frac{-i e^{-2\theta} \xi_j}{(1+e^{-2\theta} |\xi|^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Se poniamo $\psi(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/4}$ e fissiamo $\eta > 0$ si ottiene

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, y, \xi)| + |\partial_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi)| < \eta \psi(\xi)^{|\alpha| - |\beta|}$$

per ogni α, β tali che $|\alpha| \leq 2(1 + [\frac{3}{2}])$, $|\beta| \leq 2(1 + [\frac{3}{2}])$, purché $\sup_{R^3} |D^{\alpha+\beta} \Lambda|$ sia minore di un'opportuna costante (dipendente solo da η) per ogni α e j con $|\alpha| \leq 14$, $j = 1, 2, 3$. Da qui segue l'asserto giacché $\|[\sqrt{1-e^{-2\theta}} \Delta, \Lambda]\| \rightarrow 0$ quando $\eta \rightarrow 0$ in virtù del teorema di Calderon e Vaillancourt [4: th. 10.3].

Evidentemente la famiglia $\bar{H}_0(F, \theta)$ $\theta \in U$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato [13: ch VII § 2.1]; anche in questo caso non è possibile un prolungamento all'asse reale perché manca la costanza del dominio.

Per introdurre la perturbazione $-\frac{z}{r}$ osserviamo anzitutto che \bar{e}_s è relativamente limitata rispetto a $\sqrt{1-\Delta}$ [15: ch X § 2]; se $0 < z < \frac{1}{2}$ si può scegliere U in modo tale che essa sia relativamente limitata rispetto ad $\bar{H}_0(F, \theta)$ con bound relativo minore di 1 $\forall \theta \in U$. Con tale scelta di z e di U , scelta che nel seguito penseremo fissa, poniamo

$$H(F, \theta) = \overline{H}_0(F, \theta) - e^{-\theta} \frac{z}{r} \quad D(H(F, \theta)) = D(\overline{H}_0(F, \theta)).$$

adattando opportunamente la prova nota per il caso $-\Delta + Fx_1 - \frac{z}{r}$, si può dimostrare che $H(F, 0)$ è essenzialmente autoaggiunto su $C_0^\infty(R^3)$; sempre in analogia con tale caso il considerare l'operatore $H(F, \theta)$ con θ complesso ci permetterà di ottenere il prolungamento analitico che compare nella definizione di risonanza. Nel caso presente però lo studio dello spettro di $H(F, \theta)$ si presenta assai più difficoltoso sia perché non è ben noto quello di $H_0(F, \theta)$, sia perché $-\frac{z}{r}$ non è relativamente compatto rispetto ad $H_0(F, \theta)$.

Il seguente teorema ci fornisce le informazioni sullo spettro di $H(F, \theta)$ necessarie nel seguito; strumento della prova è il lemma II.1.

Teorema III.3

La famiglia di operatori $H(F, \theta)$ $\theta \in U$ è olomorfa di tipo A nel senso di Kato e

$$\sigma_{\text{ess}}(H(F, \theta)) \subseteq \Sigma.$$

Se $\lambda \in \sigma(H(F, \theta))$ e $\lambda \notin \Sigma$, allora λ è un autovalore (isolato e di molteplicità finita) per $H(F, \theta)$ che non dipende da θ insieme alla sua molteplicità.

Dimostrazione. L'olomorfia segue subito dalla costanza del dominio e dall'espressione dell'operatore per definizione [13: ch. VII § 2.1]. Per provare che $\sigma_{\text{ess}}(H(F, \theta)) \subseteq \Sigma$ procediamo in due fasi.

I) Proviamo dapprima che $\rho(H(F, \theta)) \neq \emptyset$; procedendo come nel teorema III.2 si può provare che esistono quattro costanti d_1, d_2, d_3, d_4 tali che

$$(15) \quad \| (H(F, \theta) - \lambda)u \|^2 > d_1 \|\sqrt{1-\Delta} u\|^2 + d_2 \|x_1 u\|^2 + (d_4 \lambda^2 - d_3) \|u\|^2$$

$\forall u \in S(R^3)$ $\lambda < 0$, inoltre la disuguaglianza (15) continua a valere

con le medesime costanti se in luogo di $H(F, \theta)$ si sostituisce

$H_t = (1 - t) \bar{H}_0(F, \theta) + t H(F, \theta) \quad t \in [0, 1]$; se si sceglie $\lambda \in \mathbb{R}^-$ tale che $d_4 \lambda^2 - d_3 > 0$, si trova che H_1 è un isomorfismo da $D(\bar{H}_0(F, \theta))$ dotato della norma del grafico, a $L^2(\mathbb{R}^3)$ poiché tale è H_0 [8: th. 5.2] e quindi $\lambda \in \rho(H(F, \theta))$.

II) Siamo ora in grado di provare che $\sigma_w(H(F, \theta)) \subseteq \Sigma$; questo insieme al fatto che $\rho(H(F, \theta)) \neq \emptyset$ ci assicura che $\sigma_{\text{ess}}(H(F, \theta)) \subseteq \Sigma$. Supponiamo per assurdo che $\lambda \in \sigma_w(H(F, \theta))$, $\lambda \in \mathbb{C} - \Sigma$; allora per l'osservazione che segue il teorema II.2 esiste una successione caratteristica $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $v_n(x) = 0$ se $|x| \leq n$; d'altra parte

$$\|(\bar{H}_0(F, \theta) - \lambda)v_n\| \leq \|H(F, \theta) - \lambda\| v_n + \left\| \frac{e^{-\theta} z}{r} v_n \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

giacché $\left\| \frac{e^{-\theta} z}{r} v_n \right\| \leq \frac{z}{n} |e^{-\theta}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; dunque $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione caratteristica per $\bar{H}_0(F, \theta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^\infty$ e ciò contraddice il teorema III.2.

Per provare che gli eventuali autovalori isolati e di molteplicità finita di $H(F, \theta) \quad \theta \in U$ contenuti in $\mathbb{C} - \Sigma$ sono indipendenti da θ , ragioniamo come nel teorema I.3 ed osserviamo dapprima che se $\phi \in \mathbb{R}$ allora

$$H(F, \theta + \phi) = U(\phi) H(F, \theta) U(\phi)^{-1};$$

gli operatori $H(F, \theta + \phi)$ ed $H(F, \theta)$ sono pertanto unitariamente equivalenti, essi hanno quindi il medesimo spettro ed in particolare gli stessi autovalori in $\mathbb{C} - \Sigma$. D'altra parte, per le proprietà delle famiglie olomorfe, tali autovalori sono funzioni analitiche di θ e quindi sono necessariamente costanti $\forall \theta \in U$.

Nuovamente si può ottenere un legame fra gli autovalori di $H(F, \theta)$ e le risonanze di $H(F, 0)$ mediante il seguente

Teorema III.4

Sia λ un autovalore di $H(F, \theta)$ contenuto in $C - \Sigma$; allora
 Im $\lambda < 0$ e λ è una risonanza di $H(F, 0)$.

Dimostrazione. Se N è l'insieme introdotto nel teorema I.4 ed $f_\psi(z, \theta), f_\psi^\circ(z, \theta)$ sono le funzioni date dalle espressioni (2) e (3) rispettivamente, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti in quel caso si può provare che $f_\psi(z, \theta)$ ed $f_\psi^\circ(z, \theta)$ sono costanti rispetto a θ mentre come funzioni di z_0 la prima ha un polo per $z = \lambda$ e ψ opportuno mentre la seconda è olomorfa in tutto $C - \Sigma$. Supponiamo di aver provato che $H(F, \theta)$ ed $H(0, \theta)$ tendono rispettivamente ad $H(F, 0)$ ed $H(0, 0)$ per $\theta \rightarrow 0$ $\theta \in U$ in senso forte generalizzato [13: ch VIII § 1.1], allora

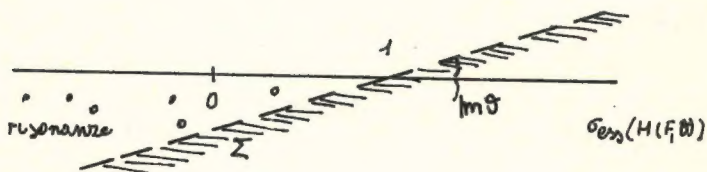
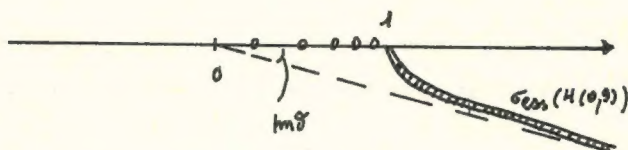
$$\begin{aligned} f_\psi(z, \theta) &= R_\psi(z) \\ f_\psi^\circ(z, \theta) &= R_\psi^\circ(z) \end{aligned} \quad \forall z \in C - \Sigma \quad \text{Im } z > 0$$

Di qui segue che Im $\lambda < 0$ giacché $R_\psi(z)$ è olomorfa per Im $z > 0$, inoltre $f_\psi(z, \theta)$ ed $f_\psi^\circ(z, \theta)$ forniscono i cercati prolungamenti rispettivamente di $R_\psi(z)$ ed $R_\psi^\circ(z)$.

Proviamo dunque che valgono le asserite convergenze forti: dimostreremo che $e^\theta H(F, \theta)$ converge fortemente in senso generalizzato ad $H_0(F, 0)$ per $\theta \rightarrow 0$ $\theta \in U$. Poiché $-\frac{z}{r}$ è relativamente limitato rispetto a $\sqrt{1 - \Delta}$ con bound relativo < 1 esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle (\sqrt{1 - \Delta} - \frac{z}{r})u, u \rangle > a \quad \forall u \in D(H(F, \theta)) \quad \|u\| = 1$$

D'altra parte $\langle (e^\theta \sqrt{1 - e^{-2\theta} \Delta} - \sqrt{1 - \Delta})u, u \rangle \in \overline{\text{co}}\{\sqrt{e^{2\theta} + t} - \sqrt{1 + t} \mid t \in [0, +\infty[\} \quad \forall u \in D(H(F, \theta)) \quad \|u\| = 1$ e quest'ultimo è un insieme limitato in \mathbb{C} che indicheremo con A , dunque il range numerico di $e^\theta H(F, \theta) = \sqrt{e^{2\theta} - \Delta} + F e^{2\theta} x_1 - \frac{z}{r}$ è contenuto nel semipiano



$$P = A + \{e^{2\theta} t; t \in R\} + [a, +\infty[.$$

Ragionando come nel teorema I.4 si ottiene la dimostrazione della convergenza forte di $H(F, \theta)$. Analogamente per $H(0, \theta)$.

Siamo ora in grado di provare che le risonanze di $H(F,0)$ (ossia gli autovalori di $H(F,\theta)$ $\theta \in U$) sono vicini agli autovalori di $H(0,0)$ che è il risultato analogo a quello del teorema I.5.

Teorema III.5

Se Σ indica ancora il semipiano introdotto nel teorema III.2, risulta

$$C - \Sigma \subseteq \Delta_b \cup \sigma_p(H(F,\theta))$$

Se poi λ è un autovalore di $H(0,\theta)$ giacente in $C - \Sigma$ (e quindi è autovalore anche di $H(0,0)$ con la medesima molteplicità), allora λ è stabile per la famiglia $H(F,\theta)$ $F \geq 0$.

Dimostrazione. Poiché evidentemente la famiglia $H(F,\theta)$ $F \geq 0$ è del tipo $\sqrt{1 - \alpha \Delta} + V(F)$, per provare il teorema sarà sufficiente mostrare che valgono le ipotesi I) ed II) del teorema II.4. Se $\lambda \in C - \Sigma$ evidentemente $\text{dist}(\lambda, \sigma_{\text{ess}}(H(F,\theta))) \geq \text{dist}(\lambda, \Sigma) > 0 \quad \forall F$ in forza del teorema III.3.

Proviamo che $d_n(\lambda, F) \geq \delta \quad \forall F > 0$ se n è sufficientemente grande. A tal fine basta osservare che

$$d_n(\lambda, F) \geq \text{dist}(\lambda, E_n)$$

essendo $E_n = \{ \langle H(F,\theta)u, u \rangle; u \in D(H(F,\theta)), \|u\| = 1, \text{supp } u \cap S(n) = \emptyset \}$.
D'altra parte

$$E_n \subseteq W(\bar{H}_0(F,\theta)) + \{ - \langle \frac{z e^{-\theta}}{r} u, u \rangle; u \in D(H(F,\theta)), \|u\| = 1, \text{supp } u \cap S(n) = \emptyset \}$$

onde $E_n \subseteq \Sigma + S(\frac{z |e^{-\theta}|}{n})$ in virtù del teorema III.2. Di qui II) e quindi il teorema.

BIBLIOGRAFIA

1. Aguilar, J.; Combes, J.M.: Commun Math. Phys. 22, 269-279 (1971).
2. Avron, J.; Herbst, I.W.: Commun Math. Phys. 52, 239-254 (1977).
3. Balslev, E.; Combes, J.M.: Commun Math. Phys. 22, 280-294 (1971).
4. Boutet de Monvel, L.: Commun on Pure and App. Math. 27, 585-638 (1974).
5. Enss, V.: Commun Math. Phys. 52, 233-238 (1977).
6. Graffi, S.; Grecchi, V.: Commun, Math. Phys. 62, 83-96 (1978).
7. Graffi, S.; Grecchi, V.: Commun. Math. Phys. 79, 91-109 (1981).
8. Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of the Second Order. Springer 1977.
9. Halmos, P.: A Hilber Space Problem Book. Springer 1967.
10. Herbst, I.W.: Commun. Math. Phys. 53, 285-294 (1977).
11. Herbst, I.W.: Commun. Math. Phys. 64, 279-298 (1979).
12. Hunziker, W.: Schrödinger Operators with Electric or Magnetic Fields. in Lecture Notes in Physics 119. Springer 1979.
13. Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer 1966.
14. Nardini, F.: Dilation Analyticity in Constant Electric Field; the Two-Body Relativistic Problem (in preparazione).
15. Reed, M.; Simon, B.: Fourier Analysis and Selfadjointness Acad. Press. 1972.
16. Reed, M.; Simon, B.: Analysis of Operators. Acad. Press 1978.
17. Vock, E.; Hunziker, W.: Commun. Math. Phys. 83, 281-302 (1982).
18. Weder, R.A.: Ann. Inst. Henri Poincaré, 20, 211-220 (1974).